УДК 512.544

Марина Г. Друшляк

Про норму абелевих нециклічних підгруп у неперіодичних групах

В даній роботі досліджуються властивості груп з вільною абелевою підгрупою рангу 2 залежно від властивостей норми абелевих нециклічних підгруп.

Ключові слова: група, недедекіндова група, норма абелевих нециклічних підгруп.

Maryna G. Drushlyak

On norm of Abelian non-cyclic subgroups in non-periodic groups

Properties of groups with free Abelian subgroup of rank 2 depending on properties of the norm of Abelian non-cyclic subgroups are inverstigated.

Key Words: group, non-Dedekind group, norm of Abelian non-cyclic subgroups..

E-mail: mathematicsspu@mail.ru
Статтю представив проф. Кириченко В.В.

В сучасній теорії груп важливе місце займають результати, отримані при вивченні груп з умовою інваріантності підгруп виділеної системи Σ. Ефективним напрямом досліджень є також вивчення груп, в яких обмеження накладаються не на систему підгруп Σ, а на нормалізатори цих підгруп та на перетин даних нормалізаторів. Якщо система Σ містить всі підгрупи групи з деякою теоретико-груповою властивістю, то вищезазначений перетин називається Σ–нормою групи. Властивості Σ–норми суттєво впливають на властивості всієї групи, особливо у випадку, коли Σ–норма є недедекіндовою підгрупою. Умова співпадання груп зі своїми Σ–нормами рівносильна умові інваріантності всіх підгруп системи Σ. Вперше ситуацію, коли Σ–норма є власною підгрупою групи, досліджував Р.Бер [1]. В якості системи Σ обиралася система всіх (циклічних) підгруп групи. Відповідна Σ–норма називається нормою $N(G)$ групи G.

В неперіодичних групах досліджувалися різні узагальнені норми групи, а саме, норма $N_G(A_\infty)$ нескінченних абелевих підгруп [2], норма $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп [3], норма $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп [4], норма N_G нециклічних підгруп [3].

В даній роботі вивчається ще одне з можливих узагальнень норми групи – норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп групи G. Вперше поняття норми N_G^A було введено Т.Д. Лукашовою в роботі [5]. Згідно [5] нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп групи G називається перетин нормалізаторів всіх абелевих нециклічних підгруп групи G за умови, що система таких підгруп непорожня. Зрозуміло, що підгрупа N_G^A є характеристичною та містить центр групи G.

У випадку, коли $G = N_G^A$, в групі інваріантні всі абелеві нециклічні підгрупи групи. Такі групи вивчалися Ф.М.Лиманом [6] і були названі $\overline{HA}$–групами.

Твердження 1 ([6]). *Неперіодичні $\overline{HA}$-групи вичерпуються групами наступних типів:*

1) $G = \langle a\rangle\lambda\langle b\rangle$, де $|a| = p^n$, $n \ge 1$ (при $p = 2$ $n > 1$), $|b| = \infty$, $[a,b] = a^{p^{n-1}}$;

2) $G = H \times B$, де H - група кватерніонів, B – нескінченна циклічна група або група, ізоморфна адитивній групі 2-ових дробів;

3) $G = A\lambda\langle b\rangle$, де A – неперіодична нециклічна абелева група без інволюцій, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$;

4) $G = A\langle b\rangle$, де A – неперіодична абелева група, $|b| = 4$, $b^2 \in A$, інволюція b^2 єдина у групі, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$;

5) $G = A\lambda\langle b\rangle$, де A – група, ізоморфна адитивній групі p-ових дробів, $|b| = \infty$, $b^{-1}ab = a^m$, $m = \pm p^n$, $n \ge 1$ для будь-якого елемента $a \in A$;

6) $G = A\lambda\langle b\rangle$, де A – нескінченна циклічна група або група, ізоморфна адитивній групі 2-ових дробів, $|b| = 8$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$;

7) $G = A\lambda\langle b\rangle$, де A – нескінченна циклічна група або група, ізоморфна адитивній групі p-ових дробів ($p \ne 2$), $|b| = 2p$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-

якого елемента $a \in A$;

8) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle c \rangle) \lambda \langle b \rangle$, *де* $|a| = p \neq 2$, $|b| = 2$, $|c| = \infty$, $c^{-1}ac = a^{-1}$, $[a,b] = 1$, $b^{-1}cb = c^{-1}$.

В даній роботі досліджуються властивості груп з вільною абелевою підгрупою рангу 2 залежно від властивостей норми N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Деякі результати роботи анонсовані в [7,8].

Теорема 1. *Норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп неперіодичної групи G дедекіндова в кожному з випадків:*

1) група G містить абелеву нециклічну підгрупу M, що задовольняє умову $M \cap N_G^A = E$;

2) норма N_G^A – скінченна;

3) група G містить нескінченну циклічну інваріантну підгрупу $\langle g \rangle$, що задовольняє умову $\langle g \rangle \cap N_G^A = E$.

Доведення. Розглянемо кожен із зазначених у теоремі випадків. Покажемо, що в нормі N_G^A інваріантні всі циклічні підгрупи в кожному з випадків.

1) Оскільки підгрупа *M* абелева нециклічна, то вона інваріантна в групі $G_1 = M \cdot N_G^A$ і
$$[M, N_G^A] \subseteq M \cap N_G^A = E.$$
Тому для довільного елемента $x \in N_G^A$ маємо
$$\langle M, x \rangle \cap N_G^A = \langle x \rangle \lhd N_G^A.$$
Звідси норма N_G^A дедекіндова.

2) Нехай $1 < |N_G^A| < \infty$. Оскільки $N_G^A \lhd G$, то $[G : C_G(N_G^A)] < \infty$ і централізатор $C_G(N_G^A)$ містить елемент *g* нескінченного порядку. Тоді для довільного елемента $y \in N_G^A$ підгрупа $\langle g, y \rangle \lhd G_1 = \langle g \rangle N_G^A$. Звідси
$$\langle g, y \rangle \cap N_G^A = \langle y \rangle \lhd N_G^A,$$
отже, норма N_G^A дедекіндова.

3) Нехай група G така, як зазначено в умові теореми. Тоді
$$[\langle g \rangle, N_G^A] \subseteq \langle g \rangle \cap N_G^A = E.$$
Якщо $x \in N_G^A$ і $1 < |x| < \infty$, то $\langle g, x \rangle \lhd G_1 = \langle g \rangle N_G^A$. Звідси $\langle g, x \rangle \cap N_G^A = \langle x \rangle \lhd N_G^A$. Нехай $|x| = \infty$. Тоді
$$\langle g^n, x \rangle \lhd G_1 = \langle g \rangle \times N_G^A$$
для довільного натурального числа *n*. Звідси
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle g^n, x \rangle = \langle x \rangle \lhd G_1$$
і далі $\langle x \rangle \lhd N_G^A$. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Якщо норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп групи G недедекіндова, то кожна абелева нециклічна підгрупа B має з нормою N_G^A неодиничний перетин.*

Наслідок 2. *Якщо норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп неперіодичної групи G недедекіндова, то вона нескінченна.*

Наслідок 3. *Якщо в неперіодичній групі G норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова, то кожна інваріантна нескінченна циклічна підгрупа має з N_G^A неодиничний перетин.*

Наслідок 4. *Якщо неперіодична група G містить абелеву нециклічну підгрупу B без скруту і має періодичну норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп, то підгрупа N_G^A дедекіндова.*

Наслідок 5. *Якщо норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп неперіодичної групи G недедекіндова і періодична, то всі абелеві підгрупи без скруту групи циклічні і N_G^A нескінченна.*

Очевидно, що в групах без скруту $N_G(A_\infty) \subseteq N_G^A$ і враховуючи теорему 1 [9], маємо
$$N_G(\infty) = N_G(A_\infty) = N_G(C_\infty) = Z(G) \subseteq N_G^A.$$

Теорема 2. *Якщо в неперіодичній групі G норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова, містить абелеву нециклічну підгрупу і не містить вільних абелевих підгруп рангу 2, то і група G не містить таких підгруп.*

Доведення. За теоремою 1 $|N_G^A| = \infty$ і оскільки норма N_G^A містить абелеві нециклічні підгрупи, то всі такі підгрупи інваріантні в N_G^A. Тому за твердженням 1 норма N_G^A є розв'язною $\overline{HA}$–групою без вільних абелевих підгруп рангу 2, тобто групою одного з типів 1), 2), 5) - 8) твердження 1, а також типів 3), 4) цього ж твердження за умови відсутності в них вільних абелевих підгруп рангу 2.

Нехай $G \supset M = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle$, $|x_1| = |x_2| = \infty$. Тоді за наслідком 1 $M \cap N_G^A \neq E$ і за умовою теореми $M \cap N_G^A = \langle y \rangle$, $|y| = \infty$.

Розглянемо підгрупу $G_1 = M \cdot N_G^A$. З умови $M \cap N_G^A = \langle y \rangle$ випливає існування такої підгрупи

$\langle x\rangle \subset M$, що $\langle x\rangle \cap N_G^A = E$ і $\langle x,y\rangle = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$. Тоді $\langle x, y^n\rangle \lhd G_1$ для довільного натурального числа *n*. Тому $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\langle x, y^n\rangle = \langle x\rangle \lhd G_1$. Тоді за теоремою 1 підгрупа N_G^A дедекіндова, що суперечить умові теореми. Теорему доведено.

Теорема 3. *Якщо неперіодична група G містить вільну абелеву підгрупу рангу 2 та її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова і містить абелеву нециклічну підгрупу, то норма N_G^A також містить вільну абелеву підгрупу рангу 2 і може бути групою лише одного з типів:*

1) $N_G^A = A\langle c\rangle$, де A – абелева група, що містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, $|c| = 4$, $c^{-1}ac = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$, $c^2 \in A$ і є єдиною інволюцією в A;

2) $N_G^A = A\langle c\rangle$, де A – абелева група без інволюцій, що містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, $|c| = 2$ і $c^{-1}ac = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$.

Доведення. Оскільки група *G* містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, то за теоремою 2 норма N_G^A також містить таку підгрупу. Тоді норма N_G^A є неабелевою неперіодичною $\overline{HA}$–групою. З опису таких груп (див. твердження 1) отримуємо твердження теореми 3. Теорему доведено.

Лема 1. *Якщо неперіодична група G містить вільну абелеву підгрупу рангу 2 та її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова, містить абелеву нециклічну підгрупу та скінченну абелеву інваріантну в групі G підгрупу F і централізатор $C_G(F)$ містить всі елементи нескінченного порядку групи, то $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$.*

Доведення. Враховуючи умови леми, приходимо до висновку, що норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп є групою одного з типів теореми 3:

1) $N_G^A = A\langle c\rangle$, де *A* – абелева підгрупа, що містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, $|c| = 4$, $c^{-1}ac = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$, $c^2 \in A$ і є єдиною інволюцією в *A*;

2) $N_G^A = A\langle c\rangle$, де *A* – абелева підгрупа без інволюцій, що містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, $|c| = 2$, $c^{-1}ac = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$.

Покажемо, що довільна нескінченна циклічна підгрупа $\langle x\rangle$ групи G є N_G^A–допустимою. Якщо $x \in N_G^A$, то $\langle x\rangle \lhd N_G^A$, оскільки в N_G^A інваріантні всі нескінченні циклічні підгрупи. Нехай $x \in G \setminus N_G^A$. Далі проаналізуємо кожен з двох випадків.

1. Нехай норма N_G^A є групою першого типу.

Оскільки c^2 – єдина інволюція в *A*, то силовська 2–підгрупа з *A* локально циклічна і інваріантна в *G*, бо підгрупа *A* характеристична в N_G^A як підгрупа, породжена всіма елементами нескінченного порядку групи N_G^A. Тоді $c^2 \in Z(G)$ і, не порушуючи загальності міркувань, $F = \langle c^2\rangle$.

Тоді $\langle x, c^2\rangle \lhd G_1 = \langle x\rangle N_G^A$. Звідси $\langle x^2\rangle \lhd G_1$ і за наслідком 3 $\langle x\rangle \cap N_G^A \neq E$. Група G містить вільну абелеву підгрупу рангу 2 $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$. Підгрупа $\langle x\rangle$ має хоча б з однією з підгруп $\langle a\rangle$ або $\langle b\rangle$ одиничний перетин. Нехай $\langle x\rangle \cap \langle a\rangle \neq E$ і $\langle x\rangle \cap \langle b\rangle = E$. Тоді $x^k = a^m$. Оскільки $\langle x, c^2\rangle \lhd G_1$ маємо, що $b^{-1}xb = x^{\alpha}c^{2\beta}$. В силу інваріантності підгрупи $\langle x^2\rangle$ в групі G_1 $b^{-1}x^2b = x^{2\alpha}$,

$$b^{-1}x^{2k}b = x^{2\alpha k} = x^{2k},$$

$\alpha = 1$. Отже, $b^{-1}xb = xc^{2\beta}$. Тоді $b^{-2}xb^2 = x$ і підгрупа $\langle x, b^2\rangle$ інваріантна в групі G_1 як абелева нециклічна. Звідси $\langle x, b^{2n}\rangle \lhd G_1$ для довільного натурального числа n і

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\langle x, b^{2n}\rangle = \langle x\rangle \lhd G_1.$$

Таким чином, довільна нескінченна циклічна підгрупа $\langle x\rangle$ групи G є N_G^A–допустимою і $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$.

2. Нехай норма N_G^A є групою другого типу.

За умовою норма N_G^A містить скінченну інваріантну в G абелеву підгрупу F. Очевидно, що $F < A$ і $[G : C_G(F)] < \infty$. До того ж $x \in C_G(F)$. Розглянемо підгрупу $G_1 = \langle x\rangle N_G^A$ і два випадки залежно від будови підгрупи F. Якщо $F \supset \langle f_1\rangle \times \langle f_2\rangle$, $|f_1| = p$, $|f_2| = q$, де p і q - прості числа (не обов'язково різні), то $\langle x, f_1 \rangle \triangleleft G_1$, $\langle x, f_2 \rangle \triangleleft G_1$. Тоді

$$\langle x, f_1 \rangle \cap \langle x, f_2 \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1$$

і підгрупа $\langle x \rangle$ є N_G^A–допустимою.

Якщо F - примарна циклічна підгрупа, то $F \supset F_1 = \langle f \rangle$, $|f| = p > 2$. Тоді $\langle x, f \rangle \triangleleft G_1$ і $\langle x^p \rangle \triangleleft G_1$. За наслідком 3 $\langle x^p \rangle \cap N_G^A \neq E$ і тому $\langle x \rangle \cap N_G^A \neq E$. За умовою в нормі N_G^A міститься вільна абелева підгрупа рангу 2 $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$. Підгрупа $\langle x \rangle$ має хоча б з однією з підгруп $\langle a \rangle$ або $\langle b \rangle$ одиничний перетин. Вважатимемо, що $\langle x \rangle \cap \langle a \rangle \neq E$, $x^k = a^m$ і $\langle x \rangle \cap \langle b \rangle = E$. Оскільки $\langle x, f \rangle \triangleleft G_1$, то $b^{-1}xb = x^{\alpha} f^{\beta}$. Тоді

$$b^{-1}x^{kp}b = x^{kp\alpha} = x^{kp},$$

$\alpha = 1$ і $b^{-1}xb = xf^{\beta}$. В такому випадку $b^{-p}xb^{p} = x$ і $\langle x, b^p \rangle \triangleleft G_1$. Отже, $\langle x, b^{pn} \rangle \triangleleft G_1$ для довільного натурального числа n,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle x, b^{pn} \rangle = \langle x \rangle \triangleleft G_1.$$

Підгрупа $\langle x \rangle$ є N_G^A–допустимою і $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$. Лему доведено.

Якщо група G задовольняє умовам леми 1, то її норма $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп є недедекіндовою групою. Використовуючи теорему 2 [4], отримуємо наступне твердження.

Наслідок 6. *Якщо група G задовольняє умовам леми 1, то всі її елементи нескінченного порядку породжують інваріантну абелеву підгрупу B і*

$$N_G(C_\infty) = B\langle d \rangle,$$

$|d| = 2$ *або* $|d| = 4$, $d^2 \in B$ *і* $d^{-1}bd = b^{-1}$ *для довільного елемента* $b \in B$.

Лема 2. *Якщо в неперіодичній групі G має місце включення $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$ і $N_G(C_\infty) = B\langle d \rangle$, де B - абелева підгрупа, породжена всіма елементами нескінченного порядку групи G, $|d| = 2$ або $|d| = 4$, $d^2 \in B$ і $d^{-1}bd = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$, то довільна абелева нециклічна підгрупа групи G міститься в $N_G(C_\infty)$.*

Доведення. Нехай F – довільна абелева нециклічна підгрупа групи G, що задовольняє умовам леми.

Якщо підгрупа F – неперіодична, то вона породжена всіма елементами нескінченного порядку і тому $F \subset N_G(C_\infty)$.

Якщо підгрупа F – скінченна, то вона N_G^A–допустима і її централізатор містить елемент x нескінченного порядку з N_G^A. Тоді для довільного елемента $f \in F$ маємо: $|fx| = \infty$, $fx \in N_G(C_\infty)$, $f \in N_G(C_\infty)$, $F \subset N_G(C_\infty)$.

Нехай підгрупа F є нескінченною періодичною абелевою підгрупою. Якщо $F \supseteq \langle f_1 \rangle \times \langle f_2 \rangle$, де $|f_1| = |f_2| = p$ - просте число, то для довільного елемента $f \in F$ підгрупа $\langle f, f_1, f_2 \rangle$ є N_G^A–допустимою, містить в своєму централізаторі елемент нескінченного порядку з N_G^A і, враховуючи попередні міркування, належить до $N_G(C_\infty)$. Звідси $F \subset N_G(C_\infty)$ і в цьому випадку.

Нехай F – нескінченна локально скінченна підгрупа і містить квазіциклічну підгрупу P. Тоді для довільного елемента $f \in F$ підгрупа $\langle f, P \rangle$ є N_G^A–допустимою, централізатор елемента f містить елементи нескінченного порядку і тому $f \in N_G(C_\infty)$ і $F \subset N_G(C_\infty)$.

Нехай F – нескінченна локально скінченна підгрупа, яка не містить квазіциклічної підгрупи. В цьому випадку для довільного елемента $f \in F$ існує нескінченна нециклічна підгрупа F_1 з F така, що $\langle f \rangle \cap F_1 = E$ та $\pi(\langle f \rangle) \cap \pi(F_1) = \emptyset$. Тоді підгрупа $\langle f, F_1 \rangle$ є N_G^A–допустимою і тому підгрупа $\langle f \rangle$ також N_G^A–допустима, як характеристична в $\langle f, F_1 \rangle$. Отже, централізатор елемента f містить елементи нескінченного порядку і тому $f \in N_G(C_\infty)$ і далі $F \subset N_G(C_\infty)$. Лему доведено.

Теорема 4. *Якщо неперіодична група G містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, а її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова, містить абелеву нециклічну підгрупу та скінченну абелеву інваріантну в групі G підгрупу F і централізатор $C_G(F)$ містить всі елементи нескінченного порядку групи, то*

$$N_G^A = N_G(C_\infty) = B\langle d \rangle,$$

де B – абелева підгрупа, породжена всіма елементами нескінченного порядку групи G, $|d| = 2$ або $|d| = 4$, $d^2 \in B$, d^2 є єдиною інволюцією в групі G і $d^{-1}bd = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$.

Доведення. За лемою 1 має місце включення $N_G^A \subseteq N_G(C_\infty)$. За лемою 2 всі абелеві нециклічні підгрупи групи G містяться в нормі $N_G(C_\infty)$ і інваріантні в ній. Отже, $N_G(C_\infty) \subseteq N_G^A$. Звідси $N_G^A = N_G(C_\infty)$. З огляду на наслідок 6 отримуємо, що норма N_G^A є групою типу, зазначеного в теоремі.

Якщо $|d| = 4$, то норма N_G^A має єдину інволюцію d^2. Покажемо, що інволюція d^2 єдина і в групі G. Припустимо, що існує інволюція $i \in G \setminus N_G^A$. Тоді $\langle i, d^2 \rangle \subset B$. Звідси підгрупа $\langle i, d \rangle$ абелева нециклічна і тому за лемою 3 $\langle i, d \rangle \subset B$, що неможливо. Отже, елемент d^2 є єдиною інволюцією в групі G. Теорему доведено.

Наслідок 7. *Якщо G – неперіодична група, що має недедекіндову норму N_G^A і $N_G^A = N_G(C_\infty)$, то фактор-група G / N_G^A періодична.*

Наступний приклад показує, що дана фактор-група може бути неабелевою, а норма N_G^A містить неінваріантні абелеві нециклічні підгрупи.

П р и к л а д.

$$G = (((\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle \times \langle a_5 \rangle \times \langle a_6 \rangle)\lambda \langle b \rangle)\lambda \langle c \rangle)\lambda \langle d \rangle,$$

де $|a_i| = \infty$, $i = \overline{1,6}$, $|b| = 7$, $|c| = 3$, $|d| = 4$, $b^{-1}a_i b = a_{i+1}$ для $i = \overline{1,5}$,

$$b^{-1}a_6 b = a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1}a_5^{-1}a_6^{-1},$$

$c^{-1}a_1 c = a_2$, $c^{-1}a_2 c = a_1^{-1}a_2^{-1}$, $c^{-1}a_3 c = a_4$, $c^{-1}a_4 c = a_3^{-1}a_4^{-1}$, $c^{-1}a_5 c = a_6$, $c^{-1}a_6 c = a_5^{-1}a_6^{-1}$,

$$c^{-1}bc = b^2,$$
$$d^{-1}a_i d = a_i^{-1},\ i = \overline{1,6},$$
$$[d,b] = [d,c] = 1.$$

В цій групі

$$N_G^A = N_G(C_\infty) = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, d \rangle$$

і $G / N_G^A \cong \langle b, c \rangle$ – неабелева група порядку 21.

Література

[1] Baer R. Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe // Comp. Math. – 1934. – 1.– S. 254 – 283.
[2] Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д. Про норму нескінченних абелевих підгруп неперіодичних груп // Матеріали III Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, Суми, 2-8 липня 2001 р. – Суми: Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка. - 2001.– С.205-207.
[3] Лиман Ф.Н., Лукашова Т.Д. Обобщённые нормы непериодических групп // Известия Гомельского университетата. – 2003. - №4(19). – С. 62-67.
[4] Лиман Ф.Н., Лукашова Т.Д. О норме бесконечных циклических подгрупп непериодических групп // Вестник ВГУ имени П.М.Машерова. – Витебск. – 2006. – №4. – С. 108-111.
[5] Лукашова Т.Д. Про норму абелевих нециклічних підгруп нескінченних локально скінченних *p*-груп // Вісник Київського університету, серія „Фіз.-мат. науки". – 2004. - №3. - С. 35-39.
[6] Лиман Ф.Н. Непериодические группы с некоторыми системами инвариантных подгрупп // Алгебра и логика. – 1968. – **7**, № 4.– С.70–86.
[7] Drushlyak M.G., Lyman F.M. On conditions of coinciding of different Σ-norms in non-periodic groups // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша. – Москва, 28 мая – 3 июня 2008г. – Москва. – 2008. – С.288-289.
[8] Drushlyak M.G., Lyman F.M. On norm of Abelian non-cyclic subgroups of non-periodic groups // Международная алгебраическая конференция, посвященная 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова «Классы групп, алгебр и их приложения». – Гомель, 9-11 июля 2007г. – Гомель. – 2007. – С. 10-11.
[9] Лиман Ф.Н., Лукашова Т.Д. О взаимосвязях между нормами некоторых систем бесконечных подгрупп в непериодических группах // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша. – Москва, 28 мая – 3 июня 2008г. – Москва. – 2008. – С.156-157.

Надійшла до редколегії 28.10.2008